پاسخ الکتریکی تیر پیزوالکتریک با استفاده از روش سختی دینامیکی*

مقاله علمی – پژوهشی

مجید جباری [۱]   بیژن احمدی [۲]

چکیده *کاهش توان مصرفی وسایل الکترونیکی و نیاز به استفاده از منابع انرژی قابل حمل موجب شده توجه پژوهشگران به برداشت انرژی از ارتعاشات محیط جلب شود. ازاین‌رو پیش‌بینی خروجی الکتریکی تیرهای پیزوالکتریک و مدل‌سازی آنها اهمّیّت ویژه‌ای پیدا کرده است. در راستای این تلاش‌ها، در این پژوهش روش سختی دینامیکی برای تیر یکسر درگیر با مقطع یکنواخت به همراه جرم متمرکز توسعه داده می‌شود و نتایج آن با نتایج حاصل از روش آنالیز مودال تحلیلی مقایسه می‌گردد که حل آنالیز مودال با پنج مود بسیار به حل به روش سختی دینامیکی نزدیک است. همچنین ماتریس سختی دینامیکی برای تیر دوبخشی توسعه داده می‌شود و به‌وسیلهٔ ماتریس به دست آمده تأثیر محل قرارگیری جرم متمرکز بر خروجی الکتریکی و رفتار سیستم بررسی می‌گردد. بر این اساس جابجایی جرم متمرکز از پایه به سمت نوک تیر موجب کاهش فرکانس طبیعی اول می‌شود، درصورتی‌که تأثیر این جابجایی بر فرکانس طبیعی دوم به‌صورت تناوبی است.*

واژه‌های کلیدی سختی دینامیکی، تیر پیزوالکتریک، برداشت انرژی، ارتعاشات.

The Electric Response of Piezoelectric Beam Using Dynamic Stiffness Method

M. Jabbari   B. Ahmadi

Abstract *The reduction of electronic devices's input power and the requirement to portable energy sources have attracted many researchers. Hence, the estimation of electrical output and modeling of piezoelectric beams have became so important. Along this efforts, dynamic stiffness method for a uniform cantilever beam with a tip mass is developed in this research and the result of this method is compared with result of analytical modal analysis method that the differences between dynamic stiffness method and analystical modal analysis method with five mode is very small. Also the dynamic stiffness matrix is developed for a two segmented beam with a tip mass. The effects of the tip mass relocating on electrical outputs and system is explored that the relocating of the tip mass from the base to the tip causes the reduction in first natural frequency of system, although the effects of this relocating on second natural frequency is alternative. Moreover, a place is proposed for the tip mass to harvest the maximum energy.*

Keywords Dynamic Stiffness; Piezoelectric Beam; Energy Harvesting; Vibrations

---

* تاریخ دریافت مقاله ۹۸/۸/۱۴ و تاریخ پذیرش آن می‌باشد.

DOI: 10.22067/fum-mech.v31i2.84089

(۱) استادیار، گروه مکانیک، مرکز تحقیقات سنگ، واحد خمینی‌شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، خمینی شهر، اصفهان.

Email: jabbari@iaukhsh.ac.ir

(۲) کارشناسی ارشد، گروه مکانیک، واحد خمینی‌شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، خمینی شهر، اصفهان.

مقدّمه

فرآیند به دست آوردن انرژی از محیط اطراف و تبدیل آن به انرژی الکتریکی قابل استفاده را برداشت انرژی می‌گویند. با پیشرفت‌های اخیر تکنولوژی در زندگی روزمره، تقاضا برای وسایل الکترونیکی قابل حمل و کم‌مصرف رو به افزایش است. در میان مکانیزم‌های مختلفی که برای تبدیل انرژی مکانیکی به الکتریسیته وجود دارد از قبیل الکترومغناطیس، پیزوالکتریک و الکترواستاتیک - مکانیزم پیزوالکتریک به دلیل راحتی استفاده از آن، دارا بودن خاصیت ذاتی اتّصال الکترومکانیکی و همچنین چگالی توان بالا، بیشترین توجّه را به خود اختصاص داده و مقالات مروری زیادی در این مورد ارائه شده است[1,2]. از دو دیدگاه می‌توان منابع برداشت انرژی را دسته‌بندی کرد، دیدگاه اوّل در نظر گرفتن عامل تأمین این انرژی که می‌تواند انسانی و محیطی باشد و دیدگاه دوم نوع انرژی مانند جنبشی و گرمایی است که به الکتریسیته تبدیل می‌شود. فن‌بورن [3] منابع مورد نظر را به سه نوع تابشی، گرمایی و مکانیکی دسته‌بندی می‌نماید. البته اخیراً منابع زیست‌شیمیایی شامل گلوکز و واکنش‌های سوخت‌سازی نیز به این فهرست افزوده شده‌اند[4]. حوزهٔ الکتریکی شامل پارامترهای متمرکز نظیر مقاومت و خازن است، ازاین‌رو تنها نیاز، به دست آوردن پارامترهای متمرکز بیان‌کنندهٔ حوزهٔ مکانیکی است. به این دلیل مدل‌سازی یک درجهٔ آزادی یک رویکرد راحت برای مدل‌سازی محسوب می‌شود که طی آن تعادل مکانیکی و معادلات حلقوی الکتریکی از طریق معادلات ساختاری به هم مرتبط می‌شوند. راندی و همکاران [5] از مدل یک درجهٔ آزادی که بر مبنای پارامترهای متمرکز بود در بررسی مکانیزم‌های تبدیل انرژی برای سیستم‌های الکترومکانیکی میکرو بهره بردند. آنها یک بازبینی گسترده را در مورد تکنولوژی‌های برداشت انرژی و منابع انرژی رایج انجام دادند که طی شبیه‌سازی‌های انجام شده، چگالی توان بالقوهٔ بالاتر پیزوالکتریک‌ها نشان داده شد.

مشکل مدل‌سازی یک درجهٔ آزادی این است که تخمین به‌وسیلهٔ آن به‌صورت تک مود صورت می‌گیرد. علاوه بر این جنبه‌های مهم فیزیکی سیستم مانند شکل مودهای دینامیکی، توزیع دقیق کرنش و تأثیر آن بر پاسخ الکتریکی در این روش در نظر گرفته نمی‌شود. ارترک و اینمن [6] مدل یک درجهٔ آزادی که به‌صورت هارمونیک تحریک می‌شد را بررسی کردند. آنها نشان دادند که رابطهٔ تحریک پایهٔ هارمونیک مرسوم برای پیش‌بینی حرکت تیر، خطاهای بزرگی را حاصل می‌کند و خطاهای مدل را نشان دادند. سپس فاکتورهای اصلاح‌کننده را برای بهبود مدل یک درجهٔ آزادی با تحریک پایهٔ هارمونیک در ارتعاش عرضی و طولی ارائه کردند. ایشان مشخص کردند که مدل یک درجهٔ آزادی را می‌توان برای نسبت‌های بالای جرم متمرکز به جرم تیر در ارتعاش عرضی استفاده کرد. درواقع جرم مؤثر تیرهای یکسردرگیر و میله‌ها در حالتی که جرم متمرکز کوچک است نتیجه‌ای ناچیز را در قیاس با پاسخ سیستم حاصل می‌کند؛ بنابراین باید از مدل اصلاح‌شده یک درجهٔ آزادی پیشنهادی استفاده کرد.

رتاتزی و همکاران [7] پژوهشی را برای ارتعاش دو تیر اویلر برنولی داخل صفحهٔ عمود بر هم که با لولای الاستیک به هم متصل شده بودند، ارائه کردند. آنها یکی از مرزها را گیردار فرض کردند و این آنالیز را برای انواع شرایط مرزی در طرف دیگر به انجام رسانیدند. معادلات حاکم بر حرکت سازه در خمش آزاد با اصل همیلتون به دست آمد و فرکانس‌های طبیعی با روش اصل تغییرات و جداسازی متغیرها حاصل شد. در پژوهش ایشان توجّه عمده به انعطاف‌پذیری و مکان لولا معطوف بود که درنهایت نتایج به خروجی به دست آمده از روش اجزای محدود بسیار نزدیک بود.

سو و بانرجی [8] ارتعاش آزاد تیرهای تیموشنکو با مواد مدرج تابعی را با توسعهٔ روش سختی دینامیکی مورد بررسی قرار دادند. در این پژوهش فرض شده بود که ویژگی‌های مادهٔ تیر به‌طور پیوسته در راستای ضخامت تغییر می‌کند. آنها معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت را

حل نموده و عبارات نیروی محوری، نیروی برشی و ممان خمشی را استخراج نمودند و درنهایت از الگوریتم ویتریک–ویلیامز به‌عنوان یک حل برای استخراج فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها استفاده نمودند. جباری و همکاران [9,10] به بررسی برداشت انرژی از تیر پیزوالکتریک چندلایه‌ای در حالات تشدید و غیر تشدید پرداختند. در مدل به‌کاررفته در تحقیق آنها از بار مقاومتی استفاده گردید و بیشترین توان برای حالت بار مقاومتی بهینه حاصل گردید. در تحقیقی دیگر آز آنها به بررسی رفتار دینامیکی تیر پیزوالکتریک پرداخته شد. نتایج به دست آمده با دو روش اجزا محدود و تجربی حاصل گردید. در مدل به‌کاررفته از شرایط مدار باز استفاده شد. جباری [11] روش‌های تئوری و تجربی تأثیر گره‌های کرنشی در برداشت انرژی از تیر یکسردرگیر پیزوالکتریک در حالات فرکانس تحریک تشدید و غیر تشدید را مورد بررسی قرار داد.

چن و همکارانش [12] مدل تحلیلی یک تیر بیمورف با استفاده از اصل هامیلتون را مورد مطالعه قرار دادند و خصوصیات استاتیکی مدل را به دست آوردند. معادلات حاکم با استفاده از یک روش عددی حاصل شده و ویژگی‌ها و خصوصیات مدل، تحلیل و آنالیز شدند. در این تحقیق، نتایج شبیه‌سازی با نتایج آزمایش برای تأیید صحّت آنها مقایسه شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که افزایش نیروی محوری تأثیر قابل توجّهی در دامنهٔ پاسخ پایدار جابجایی دارد و باعث کاهش فرکانس رزونانس می‌شود.

سختی دینامیکی محور اغلب با چندین شرایط مرزی کلاسیک مانند تکیه‌گاه ساده، ثابت و آزاد مورد بحث قرار می‌گیرند. در تحقیقی که دینگ و همکارانش [13] ارائه کردند سختی دینامیکی تیر در حال حرکت محوری با شرایط مرزی تعمیم‌یافته بحث شده است. سختی در حالات پیچشی و عمودی تقویت می‌شود. با اصلاح سختی شرایط مرزی تعمیم‌یافته می‌توانند جایگزین شرایط مرزی کلاسیک شوند. ماتریسهای سختی دینامیکی برای حرکت محوری تیرهای تیموشنکو و تیرهای اویلر برنولی با مرزهای تعمیم‌یافته به کار برده می‌شوند.

در این پژوهش تمرکز بر مدل‌سازی و تحلیل یکی از رایج‌ترین وسایل برداشت انرژی مکانیکی یعنی تیر یکسر درگیر پیزوالکتریک است. تیر یادشده به‌صورت دو شکلی و با مقطع یکنواخت بوده و تحلیل آن به روش سختی دینامیکی صورت می‌گیرد. همچنین به کمک این روش بیشینهٔ ولتاژ خروجی با پیدا کردن بهترین مکان برای جرم متمرکز حاصل می‌گردد.

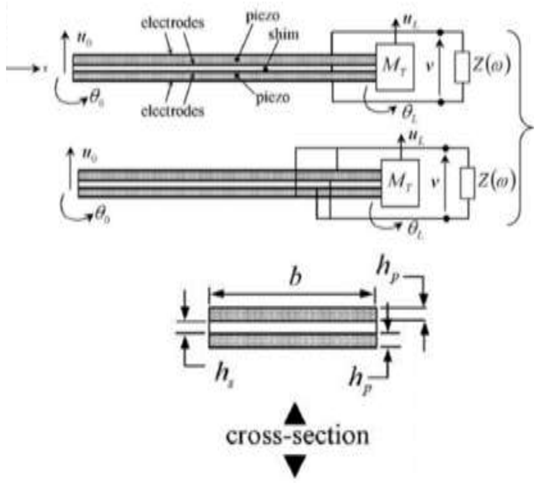
تئوری روش سختی دینامیکی

روش سختی دینامیکی، یک روش قدرتمند برای استخراج تابع پاسخ فرکانسی یک المان ساختاری با مقطع یکنواخت و ترکیب چنین المان‌هایی است. ماتریس سختی دینامیکی یک المان بر مبنای حل دقیق معادلهٔ موج است، به همین دلیل نیاز به المان‌های کمتری نسبت به روش اجزای محدود برای تحلیل تیرهای یکنواخت دارد که این امر موجب حل دقیق‌تر برای فرکانس‌های تحریک بالا می‌شود. همچنین ماتریس سختی دینامیکی یک تیر، برای مدل‌سازی تیرهایی با شرایط مرزی مختلف و ترکیب تیرهایی با مقطع یکنواخت قابل استفاده است که این مزیّت بزرگ این روش نسبت به روش آنالیز مودال است.

روش‌های سختی دینامیکی و آنالیز مودال برای شکل (۱) به کار می‌رود. پیکربندی یکسردرگیر دوشکلی به‌عنوان تیر یکنواخت مدل‌سازی شده است. ازآنجایی‌که پیزوالکتریک‌های برداشت‌کننده انرژی یکسر درگیر رایج غالباً به‌صورت تیرهای نازک طراحی و تولید می‌شوند و همچنین اکثر تیرهای دوشکلی سازه‌هایی نازک هستند، اویلر برنولی فرض نمودن تیر منطقی به نظر می‌رسد. لایه‌های پیزوالکتریک و زمینه به‌خوبی به هم مقید شده‌اند و الکترودهایی که در کل طول تیر امتداد یافته‌اند انعطاف‌پذیر بوده و در قیاس با ضخامت کل تیر، دارای ضخامت قابل صرف‌نظر می‌باشند. علاوه بر این، الکترودها به‌خوبی رسانا فرض شده‌اند. بدین ترتیب تنها

یک اختلاف پتانسیل الکتریکی در طول هر الکترود قابل تعریف است. مقاومت نشتی لایه‌های پیزوالکتریک نادیده گرفته شده است درحالی‌که این مقدار غالباً مقداری بزرگ است و می‌توان آن را به‌عنوان مقاومتی موازی با بار مقاومتی در نظر گرفت.

برای استخراج رفتار تیر متحرک با لایه‌های پیزوالکتریک روابط (۱) و (۲) به کار می‌روند [۱٤]. در رابطهٔ (۱)، D_i مؤلفه‌های بردار جابجایی الکتریکی، n مؤلفه‌های بردار میدان الکتریکی القا شده، d_{im} مؤلفه‌های ماتریس ضریب پیزوالکتریسیته، ε_{in}^{T} مؤلفه‌های ماتریس ثابت دی‌الکتریک یا گذردهی در تنش ثابت و T_m مؤلفه‌های بردار تنش است. همچنین در رابطهٔ (۲)، S_j مؤلفه‌های بردار تغییر شکل و S_{jm}^{E} هم مؤلفه‌های ماتریس ضرایب الاستیک می‌باشد.



شکل (۱): تیر دوشکلی برداشت کننده انرژی در اتصال سری و موازی

$$D_i = \varepsilon_{in}^{T} E_n + d_{im} T_m \qquad (۱)$$

$$S_j = d_{jn} E_n + S_{jm}^{E} T_m \qquad (۲)$$

برای به دست آوردن ولتاژ خروجی سیستم قانون گاوس برای یک لایه پیزوالکتریک به‌صورت رابطهٔ (۳) نوشته می‌شود.

$$q = -\int_o^L y Y_p d_{31} \frac{b\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \int_o^L b\varepsilon_{33}^{S} E_3 dx \qquad (۳)$$

به‌این‌علّت که الکترودها کاملاً رسانا هستند و پتانسیل الکتریکی در سرتاسر الکترود یکسان است، مقدار بار انباشته‌شده در مقطع میانی لایه بالایی مطابق رابطهٔ (٤) حاصل می‌شود. بدین ترتیب با گرفتن مشتق از معادله بر حسب زمان، شدّت جریان عبوری از مقاومت خارجی مطابق رابطهٔ (٥) برای یک لایهٔ پیزوالکتریک خواهد بود.

$$q = -h_{pc} Y_p d_{31} \int_o^L b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx - \frac{\varepsilon_{33}^{S} v(t)}{h_p} \int_o^L b dx \qquad (۴)$$

$$i(t) = -h_{pc} Y_p d_{31} \int_o^L b \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} dx - \frac{\varepsilon_{33}^{S} \dot{v}(t)}{h_p} \int_0^L b dx \qquad (۵)$$

رابطهٔ نهایی شدّت جریان i به‌عنوان تابعی از زمان به‌صورت معادلهٔ (٦) به دست می‌آید که C_p ،β و f در رابطهٔ (٤) ارائه شده‌اند. C_p در معادلهٔ (٦)، ظرفیت داخلی یک لایه پیزوالکتریک و h_{pc} در معادلهٔ (۷) فاصله محور خنثی تا مقطع میانی لایه پیزوالکتریک است.

$$i(t) = f\beta \int_0^L \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} dx - \frac{f}{a} C_p \dot{v} \qquad (٦)$$

$$\beta = -d_{31} Y_p h_{pc} b \qquad (۷)$$
$$C_p = \varepsilon_{33}^{S} \frac{bL}{h_p}$$
$$f = \begin{cases} 1, & for\ series \\ 2, & for\ parallel \end{cases}$$

برای تحلیل به روش سختی دینامیکی، تحریک هارمونیک فرض می‌شود. بدین ترتیب جابه‌جایی به‌صورت معادلهٔ (۸) به دست می‌آید که با استفاده از

معادلهٔ حرکت تیر معادلهٔ (۹) حاصل می‌شود. $\hat{B}$ و k طبق روابط (۱۰) و (۱۱) به دست می‌آیند.

$$u(x,t) = \tilde{u}(x)e^{j\omega t} \tag{۸}$$

$$\tilde{u}^{iv} - k\tilde{u} = 0 \tag{۹}$$

$$k = \omega^{\frac{1}{2}}\left[\frac{m}{\hat{B}\,/\left(1 - j\,\frac{c_a}{m\omega}\right)}\right]^{\frac{1}{4}} \tag{۱۰}$$

$$\hat{B} = B\left(1 + j\omega\frac{A}{B}\right) \tag{۱۱}$$

$$B = Y_pI_p + Y_sI_s$$

$$A = c_pI_p + c_sI_s$$

c_a ضریب میرایی لزج میانگین محیط بر واحد طول، c_p ضریب میرایی کلوین ویت لایه پیزوالکتریک، c_s ضریب میرایی کلوین ویت لایهٔ میانی، Y_p مدول الاستیسیته مادهٔ پیزوالکتریک، Y_s مدول الاستیسیته لایه میانی، I_p و I_s به ترتیب گشتاور دوم سطح حول محور خنثی برای هر دو لایه پیزوالکتریک و لایهٔ میانی می‌باشند. ضریب میرایی با استفاده از روش میرایی ریلی با رابطهٔ (۱۲) حاصل می‌شود [۱۰]. ζ_r نسبت میرایی و m جرم تیر هستند.

$$\zeta_r = \frac{A\omega_r}{2B} + \frac{c_a}{2m\omega_r} \tag{۱۲}$$

اگر Z نمایندهٔ مقاومت ظاهری بار الکتریکی باشد رابطهٔ (۱۳) را می‌توان نوشت. با جایگذاری رابطهٔ (۱۱) در (۳)، دامنهٔ ولتاژ به‌صورت معادلهٔ (۱٤) به دست می‌آید که در آن G از رابطهٔ (۱۵) حاصل می‌شود.

$$\tilde{v} = Z\tilde{\iota} \tag{۱۳}$$

$$\tilde{v} = G\left[\tilde{\theta}(L) - \tilde{\theta}(O)\right] \tag{۱٤}$$

$$G = \frac{j\omega f\beta}{j\omega\left(\frac{f}{a}\right)C_p + \frac{1}{Z}} \tag{۱۵}$$

D ماتریس سختی دینامیکی تیر با جرم متمرکز به‌صورت رابطهٔ (١٦) است.

$$f = Du \tag{۱۶}$$
$$\mathrm{f} = [\tilde{F}_0\ \ \tilde{\Gamma}_0\ \ \tilde{F}_L\ \ \tilde{\Gamma}_L]^T$$
$$\mathrm{u} = \left[\tilde{u}_0\ \ \tilde{\theta}_0\ \ \tilde{u}_L\ \ \tilde{\theta}_L\right]^T$$

$\tilde{F}_0$ نیروی برشی و $\tilde{\Gamma}_0$ ممان خمشی در تکیه‌گاه گیردار و $\tilde{F}_L$ نیروی برشی و $\tilde{\Gamma}_L$ ممان خمشی در سر تیر با وجود جرم متمرکز می‌باشند. ماتریس سختی دینامیکی تیر به‌صورت معادلهٔ (۱۷) است که در این معادله D_e به‌عنوان ماتریس سختی دینامیکی تیر شناخته می‌شود.

$$\boldsymbol{D_e} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_5 & -s_4 & s_6 \\ s_3 & -s_4 & s_1 & -s_2 \\ s_4 & s_6 & -s_2 & s_5 \end{bmatrix} +$$
$$\vartheta G \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$S_1 = \frac{\hat{B}k^3(\cos kL\,.\sinh kL + \cosh kL\,.\sin kL)}{\Delta}$$
$$S_2 = \frac{\hat{B}k^2(\sin kL\,.\sinh kL)}{\Delta}$$
$$S_3 = -\frac{\hat{B}k^3(\sin kL + \sinh kL)}{\Delta}$$
$$S_4 = \frac{\hat{B}k^2(\cosh kL - \cos kL)}{\Delta}$$
$$S_5 = \hat{B}k\,\frac{(\cosh kL.\sin kL - \cos kL.\sinh kL)}{\Delta}$$
$$\Delta = 1 - \cosh kL\,.\cos kL$$
$$\vartheta = -d_{31}Y_pb\left(\frac{h_p + h_s}{a}\right) \tag{۱۷}$$

در رابطهٔ (۱۷) مقدار a برابر با ۲ و ۱ به ترتیب برای حالت سری و موازی است. با استفاده از روابط تعادل و با وجود جرم متمرکز ماتریس سختی دینامیکی با رابطهٔ (۱۸) ارائه می‌گردد.

$$D = D_e + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_m \end{bmatrix}$$

$$D_m = \begin{bmatrix} -\omega^2 M_T + j\omega c_a \dfrac{M_T}{m} & 0 \\ 0 & -\omega^2 I_T \end{bmatrix}$$

$$R = D^{-1}$$

(۱۸)

M_T نمایندهٔ جرم متمرکز و I_T نشان‌دهندهٔ ممان اینرسی جرم متمرکز است. بر اساس روابط جفت‌شدگی و معادلات حرکت، پاسخ ولتاژ و جابجایی با روابط (۱۹) و (۲۰) حاصل می‌شود.

$$\tilde{v} = G\left[\frac{R_{41}R_{22} - R_{42}R_{21}}{\alpha}\right]\tilde{u}_0 + G\left[\frac{R_{42}R_{11} - R_{41}R_{12} - \alpha}{\alpha}\right]\tilde{\theta}_0$$

$$\tilde{\theta}_0 = R_{12}\tilde{F}_0 + R_{22}\tilde{\Gamma}_0$$

$$\tilde{u}_0 = R_{11}\tilde{F}_0 + R_{12}\tilde{\Gamma}_0$$

$$\alpha = R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21}$$

(۱۹)

$$\tilde{u}_L = \left(\frac{R_{31}R_{22} - R_{32}R_{21}}{\alpha}\right)\tilde{u}_0 + \left(\frac{R_{32}R_{11} - R_{31}R_{12}}{\alpha}\right)\tilde{\theta}_0$$

(۲۰)

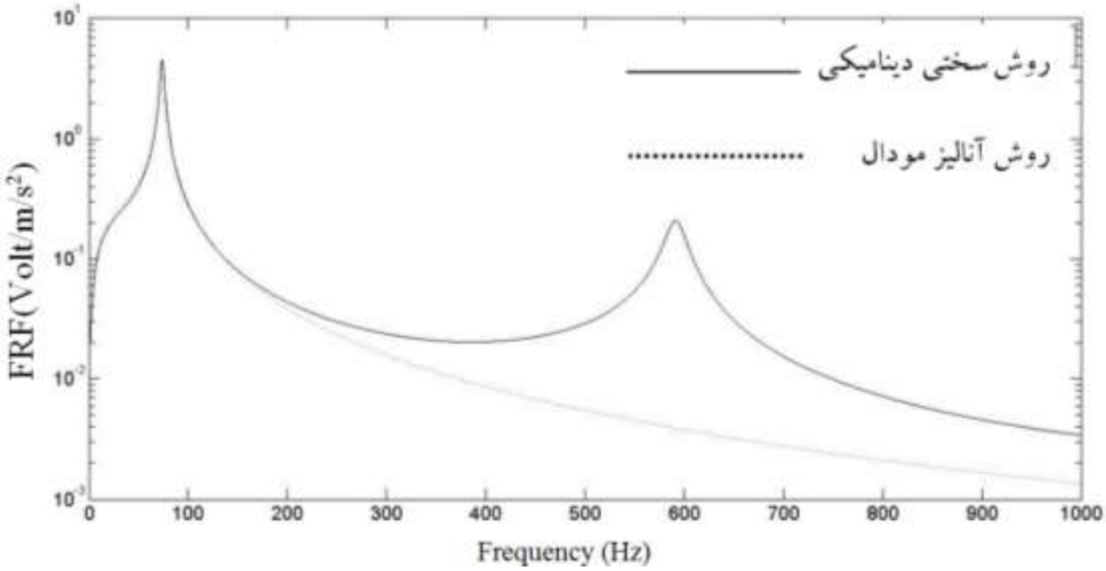
نتایج

برای بررسی اعتبار روش سختی دینامیکی، سیستم با مشخصات آورده شده در جدول (۱) تحلیل می‌شود. همچنین نسبت‌های میرایی برای دو مود اوّل به ترتیب $\zeta_1 = 0.0166$ و $\zeta_2 = 0.0107$ و مقدار جرم متمرکز $M_T = 0.5m_b$ در نظر گرفته شده است [۱۵]. مقادیر ζ_1 و ζ_2 برای دو مود ارائه شده است که با کمک رابطهٔ (۹) مقادیر c_a و A به دست می‌آید. برای حصول ζ_3 ، ζ_4 و ζ_5 از ζ_1 و ζ_2 بهره گرفته می‌شود، هرچند امکان دارد برای مودهای بالاتر c_a و A به دست آمده معتبر نباشد. با استفاده از نرم‌افزار متلب، برنامه‌نویسی جهت دریافت پاسخ الکتریکی و مکانیکی برای روش سختی دینامیکی و آنالیز مودال حاصل گردیده است. در روش آنالیز مودال از یک تا پنج مود برای حل استفاده شده است.

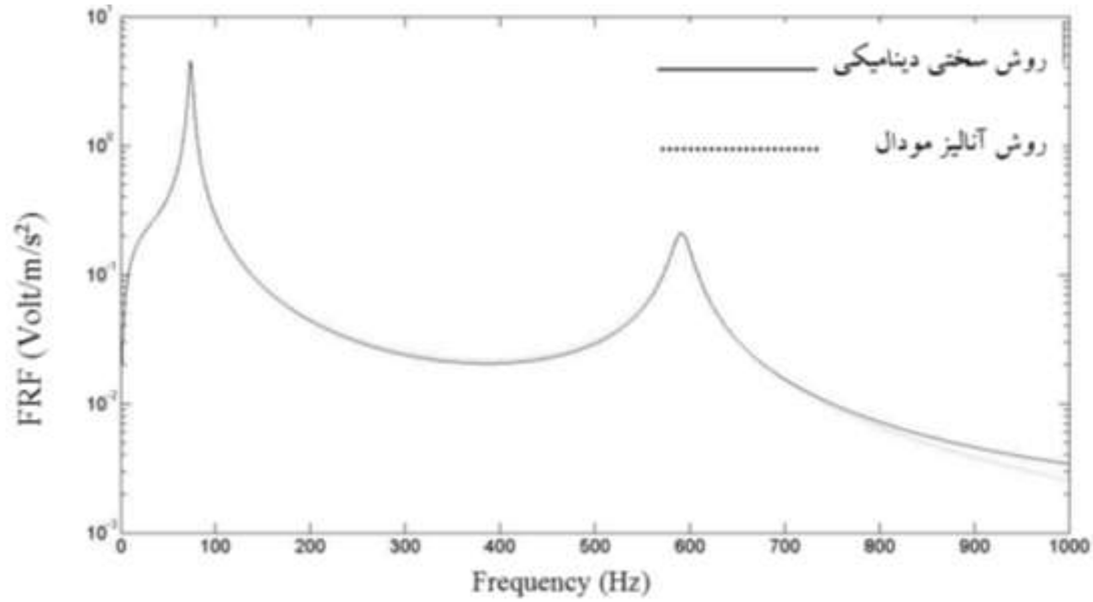
شکل (۲) نمودار حاصل از تحلیل به روش سختی دینامیکی را در مقابل روش آنالیز مودال با یک مود نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است به این دلیل که آنالیز مودال با یک مود حل شده، تقریب خوبی از تابع پاسخ فرکانسی (FRF) حداکثر ولتاژ خروجی بر حسب شتاب پایه در محدوده فرکانس اوّل حاصل می‌کند که با روش سختی دینامیکی، 1.4 درصد اختلاف دارد. طبق جدول (۲) فرکانس تشدید در روش سختی دینامیکی 73.77Hz است، اما در روش آنالیز مودال این مقدار 73.98Hz است. همچنین نمودار روش آنالیز مودال پس از فرکانس تحریک 150Hz از نمودار روش سختی دینامیکی فاصله می‌گیرد. در حالتی که آنالیز مودال با دو مود محاسبه گردد طبق شکل (۳) در اطراف قلّهٔ دوم تقریب خوبی از ولتاژ خروجی برحسب شتاب پایه به دست می‌آید که 2.26 درصد با روش سختی دینامیکی اختلاف دارد. به همین ترتیب با حل به روش آنالیز مودال با تعداد مودهای بیشتر، اختلاف نمودارهای حاصل از روش سختی دینامیکی و روش آنالیز مودال کاهش می‌یابد به‌طوری‌که با توجّه به شکل (٤) نمودارهای این دو روش از هم قابل تشخیص نمی‌باشند.

جدول (۱): مشخصات تیر پیزوالکتریک نمونه

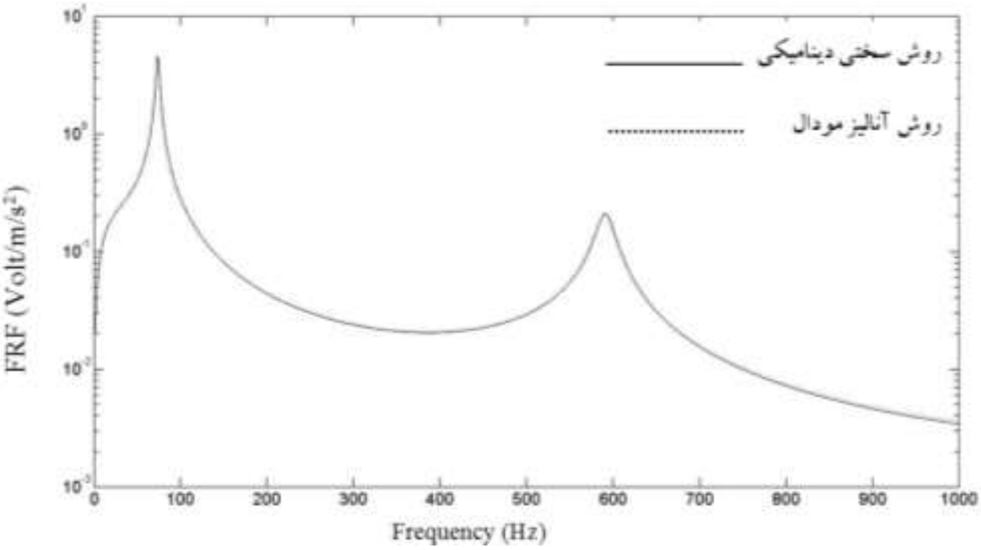
پارامتر	مقدار
h_p (mm)	0.267
h_s (mm)	0.300
L (mm)	60
b (mm)	25
Y_p (GPa)	6200
Y_S (GPa)	7200
چگالی لایه پیزوالکتریک $(\mathrm{kg/m^3})$	7800
چگالی لایهٔ میانی $(\mathrm{kg/m^3})$	2700
d_{31} (m/V)	-320×10^{-12}
ε_{33}^{T} $(\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}})$	3.3646×10^{-8}



شکل (۲): FRF (Frequency Response Function) نسبت ولتاژ بر شتاب به دو روش سختی دینامیکی و روش آنالیز مودال با تأثیر یک مود فرکانسی



شکل (۳): FRF نسبت ولتاژ بر شتاب به دو روش سختی دینامیکی و روش آنالیز مودال با تأثیر دو مود فرکانسی



شکل (٤): FRF نسبت ولتاژ بر شتاب به دو روش سختی دینامیکی و روش آنالیز مودال با تأثیر سه مود فرکانسی

نتایج حاصل از نمودارهای FRF در روش‌های سختی دینامیکی و آنالیز مودال با مودهای مختلف در جدول (۲ و ۳) ارائه شده است.

جدول (۲): تفاوت FRF های در روش‌های سختی دینامیکی و آنالیز مودال در فرکانس تشدید اوّل

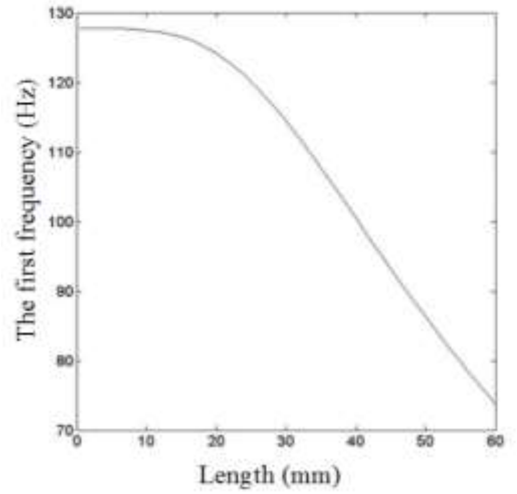
نوع روش	فرکانس تشدید اول	درصد اختلاف فرکانس تشدید اول با روش سختی دینامیکی	بیشینه دامنه ولتاژ خروجی بر شتاب	درصد اختلاف بیشینه دامنه با روش سختی دینامیکی
روش سختی دینامیکی	73.77	-	4.495	-
آنالیز مودال با پنج مود	73.80	0.04	4.489	0.13
آنالیز مودال با چهار مود	73.82	0.07	4.487	0.18
آنالیز مودال با سه مود	73.83	0.08	4.483	0.27
آنالیز مودال با دو مود	73.8	0.12	4.477	0.40
آنالیز مودال با یک مود	73.98	0.28	4.432	1.40

جدول (۳): تفاوت FRF های در روش‌های سختی دینامیکی و آنالیز مودال در فرکانس تشدید دوم

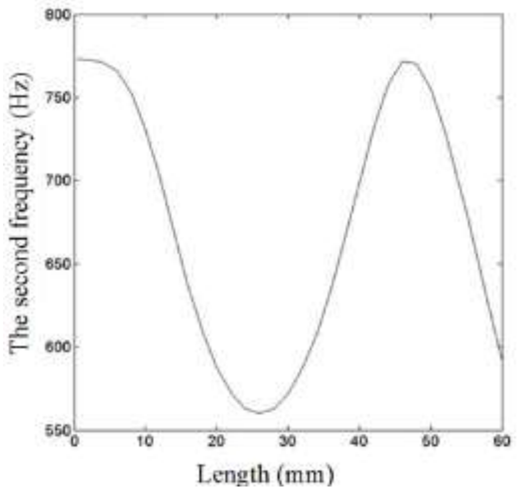
نوع روش	فرکانس تشدید دوم	درصد اختلاف فرکانس تشدید دوم با روش سختی دینامیکی	بیشینه دامنه ولتاژ خروجی بر شتاب	درصد اختلاف بیشینه دامنه با روش سختی دینامیکی
روش سختی دینامیکی	591.3	-	0.2081	-
آنالیز مودال با پنج مود	591.4	0.02	0.2098	0.82
آنالیز مودال با چهار مود	591.4	0.02	0.2103	1.06
آنالیز مودال با سه مود	591.5	0.03	0.2114	0.27
آنالیز مودال با دو مود	591.5	0.03	0.2128	1.58
آنالیز مودال با یک مود	-	-	-	2.26

برای یافتن تأثیر جابه‌جایی جرم متمرکز کُدهای نوشته شده در نرم‌افزار متلب، برای فاصلهٔ مرکز جرم تا پایه تیر اجرا می‌شود. به‌این‌علّت که جابه‌جایی جرم متمرکز بر فرکانس‌های طبیعی تأثیر می‌گذارد و این تأثیر بر مقادیر ضرایب میرایی اثرگذار است. در این حالت تحلیل در حالت نامیرا مورد بررسی قرار می‌گیرد.

شکل (۵) تغییرات فرکانس طبیعی اوّل را بر حسب فاصله جرم متمرکز از پایه نشان می‌دهد. مطابق آن هرچقدر جرم متمرکز از پایه دورتر شود، فرکانس طبیعی اول کاهش می‌یابد. فرکانس طبیعی اوّل برای جرم متمرکز در فاصلهٔ 0.5mm از پایهٔ تیر 127.8Hz است که به‌تدریج با افزایش فاصله تا 15mm از پایه، کاهش فرکانس طبیعی اوّل با شیب بسیار کندی صورت می‌گیرد. از فاصلهٔ میانی تیر تا انتهای تیر کاهش مقدار فرکانس تقریباً به‌صورت خطی و با شیب تند انجام می‌شود، به‌طوری‌که کاهش آن در این فاصله 35.6 درصد است. در ارتباط با تغییرات فرکانس طبیعی دوم تیر نسبت به فاصلهٔ جرم متمرکز از پایه، به‌مانند فرکانس طبیعی اوّل، در ابتدا کاهش فرکانس طبیعی با شیبی بسیار کند پیش می‌رود اما با افزایش فاصلهٔ جرم از پایه، این روند به‌تندی صورت می‌گیرد به‌طوری‌که طبق شکل (٦) کمترین فرکانس طبیعی دوم در فاصله 26mm جرم متمرکز از پایه متحرک و مقدار 560.1Hz است. با توجّه به شکل (٦) مشخص می‌شود که فرکانس طبیعی دوم رابطه‌ای تناوبی با فاصله جرم متمرکز دارد که طی آن در فاصله‌های 4mm و 46mm جرم از تیر، مقدار فرکانس طبیعی دوم 771.6Hz است. به این دلیل که غالب ارتعاشات قابل برداشت از محیط در حوزه فرکانسی پایین اتفاق می‌افتند، پایین بودن فرکانس تشدید تیر می‌تواند کمک شایانی به میزان انرژی برداشت شده داشته باشد. ازاین‌رو صرف‌نظر از میزان انرژی برداشتی، تعبیه جرم متمرکز در انتهای تیر می‌تواند برای چنین مصرفی مفید واقع شود.



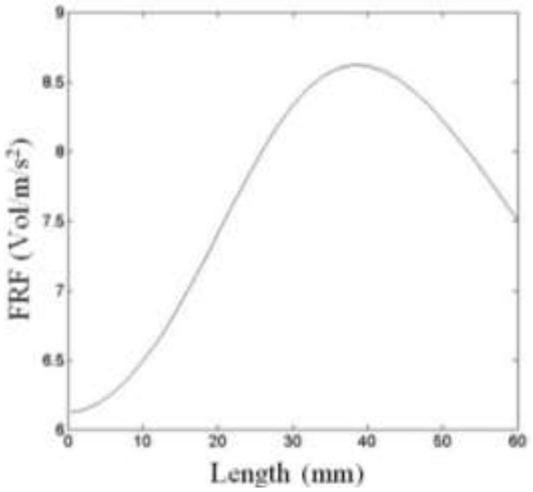
شکل (۵): تغییرات فرکانس طبیعی اوّل را بر حسب فاصلهٔ جرم متمرکز از پایه



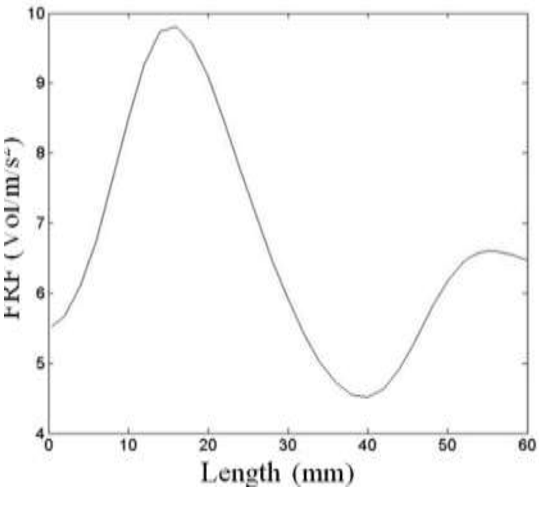
شکل (٦): تغییرات فرکانس طبیعی دوم را بر حسب فاصلهٔ جرم متمرکز از پایه

فارغ از مقدار فرکانس تشدید در تعیین مکان جرم متمرکز، میزان حداکثر توان برداشت‌شده، پارامتری تعیین‌کننده در جابه‌جایی جرم متمرکز است. ازاین‌رو برای دو مود اوّل، حداکثر نسبت ولتاژ خروجی بر شتاب پایه بر حسب فاصله جرم متمرکز تا پایه در شکل (۷) نشان داده شده است. با توجّه به شکل مشخص می‌شود که حداکثر نسبت ولتاژ بر شتاب پایه در اطراف فرکانس

تشدید اوّل برای فاصله 38mm جرم متمرکز تا پایه اتّفاق می‌افتد که میزان آن $8.622\ \frac{\text{volt}}{\text{m/s}^2}$ است. همچنین کمترین نسبت ولتاژ خروجی بر شتاب پایه در نزدیک‌ترین نقطهٔ قرارگیری جرم متمرکز نسبت به پایه وجود دارد و مقدار آن $6.125\ \frac{\text{volt}}{\text{m/s}^2}$ است.



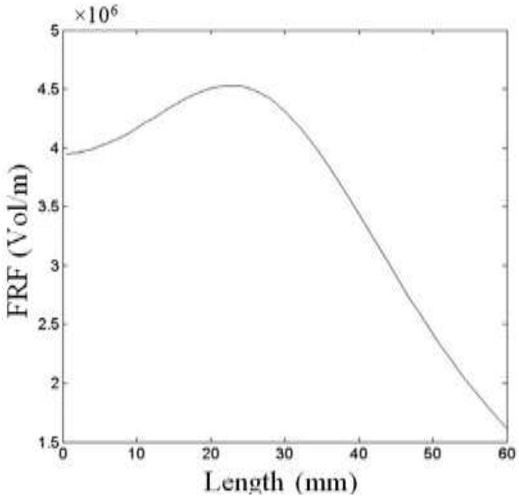
شکل (۷): نسبت ولتاژ خروجی بر شتاب پایه در فرکانس تشدید اول بر حسب فاصلهٔ جرم متمرکز تا پایهٔ تیر



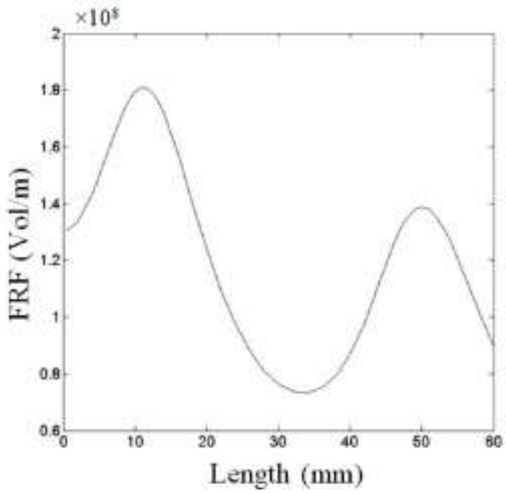
شکل (۸): نسبت ولتاژ خروجی بر شتاب پایه در فرکانس تشدید دوم بر حسب فاصلهٔ جرم متمرکز تا پایهٔ تیر

قرارگیری در نقطهٔ انتهایی هرچند موجب کاهش فرکانس تشدید اوّل می‌شود اما ولتاژ خروجی بر حسب شتاب پایه آن $7.505\ \frac{\text{volt}}{\text{m/s}^2}$ است. ازاین‌رو درصورتی‌که هدف برداشت بیشینه از ناحیه فرکانس تشدید باشد قرارگیری جرم در نوک تیر نمی‌تواند گزینه مطلوبی باشد. ولتاژ خروجی بیشینه بر حسب شتاب پایه برای مود دوم مطابق شکل (۸) است که طی آن حداکثر نسبت ولتاژ خروجی بر شتاب پایه $9.811\ \frac{\text{volt}}{\text{m/s}^2}$ بوده که برای جرم متمرکز با فاصلهٔ 16mm از پایه حاصل می‌گردد. نکته قابل توجّه این است که کمترین نسبت ولتاژ بر شتاب پایه مربوط به فاصلهٔ 40mm از پایهٔ تیر بوده که مقدار آن $4.513\ \frac{\text{volt}}{\text{m/s}^2}$ است. این فاصله بسیار به نقطهٔ حداکثر نسبت ولتاژ خروجی بر شتاب پایه نزدیک است، اما نسبت ولتاژ خروجی آن بر حسب پایه حتی از قرارگیری جرم در انتها تیر کمتر است. بدین ترتیب در صورت نیاز به برداشت حداکثر ولتاژ خروجی، فواصل 16mm یا 38mm جرم متمرکز از پایه پیشنهاد می‌شود. تحلیل جاری برای حالت نامیرا در نظر گرفته شده است.

تاکنون نمودارهای حداکثر نسبت ولتاژ خروجی بر شتاب پایه با مکان جرم متمرکز رسم شده‌اند؛ اما اگر حداکثر نسبت ولتاژ خروجی بر جابه‌جایی انتقالی پایه نسبت به مکان جرم متمرکز رسم شود طبق شکل‌های (۹ و ۱۰) قلّه‌های نمودار جابه‌جا خواهد شد. طبق شکل (۹) برای فرکانس‌های تشدید اوّل حداکثر نسبت ولتاژ خروجی بر جابه‌جایی پایه برای فاصلهٔ 22mm جرم متمرکز از پایه حاصل می‌گردد و مقدار آن $4.531\ \frac{\text{Mvolt}}{\text{m}}$ است. شکل ۱۰ هم برای فرکانس‌های تشدید دوم نمایندهٔ حداکثر نسبت ولتاژ خروجی بر جابه‌جایی است که در آن حداکثر نسبت ولتاژ خروجی بر شتاب پایه برای جرم متمرکز با فاصلهٔ 11mm از پایه رخ می‌دهد و مقدار آن $181.1\frac{\text{Mvolt}}{\text{m}}$ است. کمترین نسبت ولتاژ خروجی بر جابه‌جایی پایه برای جرم متمرکز با فاصله 34mm از پایه بوده و مقدار آن $73.2\ \frac{\text{Mvolt}}{\text{m}}$ است.



شکل (۹): نسبت ولتاژ خروجی بر جابه‌جایی پایه در فرکانس تشدید اوّل بر حسب فاصلهٔ جرم متمرکز تا پایهٔ تیر



شکل (۱۰): نسبت ولتاژ خروجی بر جابه‌جایی پایه در فرکانس تشدید دوم بر حسب فاصلهٔ جرم متمرکز تا پایهٔ تیر

۴- نتیجه‌گیری

در این پژوهش روش سختی دینامیکی برای تیر یکسر درگیر با مقطع یکنواخت به همراه جرم متمرکز توسعه داده شد. این روش بر مبنای حل دقیق تدوین گردیده است. از رویکرد نیوتن برای حصول روابط استفاده شد که طی آن دامنهٔ ولتاژ خروجی تابعی از شیب ابتدا و انتهای تیر به دست آمد و حصول این دو پارامتر با کمک ماتریس سختی دینامیکی تیر صورت گرفت. همچنین خروجی الکتریکی با استفاده از روش آنالیز مودال برای یک مود تا پنج مود نیز حاصل شد که در اطراف فرکانس تشدید اول نتایج حاصل از روش سختی دینامیکی و آنالیزمودال با یک مود فرکانسی به هم نزدیک بود اما با افزایش فرکانس، این دو نمودار از هم فاصله می‌گرفتند. استفاده از آنالیز مودال با تعداد مود بیشتر موجب شد که نمودار پاسخ ولتاژ حاصل از دو روش به هم نزدیک شوند.

از اهداف این تحقیق می‌توان به بررسی اثرات جابه‌جایی جرم متمرکز بر خروجی الکتریکی و فرکانس‌های طبیعی سیستم در حالت نامیرا با روش سختی دینامیکی اشاره کرد. طبق نتایج به‌دست‌آمده در این پژوهش، سیستم‌هایی که جرم متمرکزشان نزدیک‌تر به پایه بود فرکانس طبیعی اوّل بزرگ‌تری داشتند و کمترین فرکانس طبیعی اوّل برای جرم متمرکز در نوک تیر حاصل شد؛ اما تغییرات فرکانس طبیعی دوم با فاصله جرم متمرکز از پایهٔ رابطهٔ تناوبی داشت به‌طوری‌که بیشترین مقدار فرکانس طبیعی دوم برای موقعیت جرم در 46mm از پایه و جرم قرار گرفته در پایه به دست آمد و کمترین آن برای جرم متمرکز با فاصله 26mm از پایه تیر حاصل شد.

پس‌ازآن نسبت ولتاژ خروجی بر شتاب پایه برای قرارگیری جرم متمرکز در فواصل مختلف مورد بررسی قرار گرفت که بیشترین خروجی در فرکانس تشدید اوّل برای جرم متمرکز به فاصله 38mm از پایه حاصل شد، اما بیشترین خروجی در فرکانس تشدید دوم برای سیستمی با جرم متمرکز در فاصلهٔ 16mm از پایه به دست آمد؛ بنابراین در صورت نیاز به برداشت حداکثر ولتاژ خروجی، فواصل 16mm یا 38mm جرم متمرکز از پایه پیشنهاد گردید.

فهرست علائم

B	عرض تیر
c_a	ضریب میرایی لزج میانگین محیط بر واحد طول

c_s	ضریب میرایی کلوین ویت لایهٔ میانی
c_p	ضریب میرایی کلوین ویت لایه پیزوالکتریک
C_p	ظرفیت داخلی یک لایه پیزوالکتریک
d_{im}	مؤلفه‌های ماتریس ضریب پیزوالکتریسیته
D	ماتریس سختی دینامیکی تیر با جرم متمرکز
D_e	ماتریس سختی دینامیکی تیر بدون جرم متمرکز
D_i	مؤلفه‌های بردار جابجه‌ایی الکتریکی
h_s	ضخامت لایهٔ میانی
h_p	ضخامت هر لایه پیزوالکتریک
h_{pc}	فاصله محور خنثی تا مقطع میانی لایه پیزوالکتریک
$\tilde{I}$	دامنه شدّت جریان
I_p	گشتاور دوم سطح حول محور خنثی برای لایه‌های پیزوالکتریک
I_s	گشتاور دوم سطح حول محور خنثی برای لایه میانی
I_T	ممان اینرسی جرم متمرکز
L	طول تیر
M	جرم واحد طول
m_b	جرم تیر
M_T	جرم متمرکز
S_j	مؤلفه‌های بردار کرنش
S^E_{jm}	مؤلفه‌های ماتریس ضرایب الاستیک
T_m	مؤلفه‌های بردار تنش
$\tilde{u}$	دامنه جابه‌جایی در راستای y
u_b	جابجایی پایه
$v(t)$	ولتاژ کل مجموعه مستقل از نوع اتصال
$\tilde{v}$	دامنه ولتاژ کل مجموعه
Y_p	مدول الاستیسیته ماده پیزوالکتریک
Y_s	مدول الاستیسیته لایه میانی
ε^T_{in}	مؤلفه‌های ماتریس ثابت دی‌الکتریک در تنش ثابت
ε^S_{33}	گذردهی در کرنش ثابت
ω	فرکانس تحریک
ω_r	فرکانس طبیعی تیر در مود r

مراجع

1. Hamilton, MC., "Recent advances in energy harvesting technology and techniques", *IECON 2012 - 38th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society. Montreal, QC*, pp. 6297-6304,(2012).
2. Kim, H. and Kim, JH.,"Review of piezoelectric energy harvesting based on vibration", *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, Vol. 12, No.6, pp. 1129-1141, (2011).
3. Buren, V. and Worn, B. "Intertial electromagnetic micro-generators" , *Ph.D. dissertation ETH 16466, Swiss Federal Institute of Technology*, (2006).
4. JoonKim, K. and Cottone, F. "Energy scavenging for energy efficiency in networks and applications", *Bell Labs Technical Journal*, Vol. 15, No.2, pp. 7-29, (2010).
5. Roundy, S. and Wright, P. Rabaey, J. "A Study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes", *Comput Commun*, Vol. 26, No.1,pp. 1131–1144, (2003).
6. Erturk, A. and Inman DJ. "On mechanical modeling of cantilevered piezoelectric vibration energy harvesters. J. Intell", *Mater. Syst. Struct*, Vol. 19, No.1, pp.1311-1325, (2008).
7. Ratazzi, AR. and Bambill, DV. Rossit, CA. "Free vibrations of beam system structures with elastic

boundary conditions and an internal elastic hinge", *Chinese Journal of Engineering*, Vol. 89, No.1, pp. 556–568, (2013).

8. Su, H. and Banerjee, JR "Development of dynamic stiffness method for free vibration of functionally graded timoshenko beams", *Computers and Structures*, Vol. 147, No.1, pp. 107–116, (2015).
9. Jabbari, M. and Ghayour, M. Mirdamadi, HR. "Energy harvesting of a multilayer piezoelectric beam in resonance and off-resonance cases", *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 139, No.3, pp. 031008, (2017).
10. Jabbari, M. and Ghayour, M. Mirdamadi, HR. "Experimental and numerical results of dynamics behavior of a nonlinear piezoelectric beam", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 23, No.8, pp. 853-864, (2017).
11. Jabbari, M. "The Effect of strain nodes on the energy harvesting of the cantilever piezoelectric beam with the vibration mode excitation" *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No.10, pp. 65-72, (2017).
12. Chen, H. and Wang, J. Chen, C. Liu, S. Chen, H. "Dynamic modeling and characteristic analysis of cantilever piezoelectric bimorph", *Mathematical Problems in Engineering*, Volume. 2019, Article ID 3926906, p. 9 (2019).
13. Ding, H. and Zhu, M. Chen, L. "Dynamic stiffness method for free vibration of an axially moving beam with generalized boundary conditions", *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 40, pp. 911–924, (2016).
14. Ballas, R. "Piezo electric multilayer beam bending actuators". Springer, *Verlag Berlin Heidelberg*, (2007).
15. Bonello, P. and Rafique, SJ. "Modeling and analysis of piezoelectric energy harvesting beams using the dynamic stiffness and analytical modal analysis methods", *ASME J. Vibr*. Vol. 133, No.1, 011009, (2011).